

1.2 Funções

Sejam X e Y dois conjuntos.

Uma **aplicação** (ou **função**) de X em Y

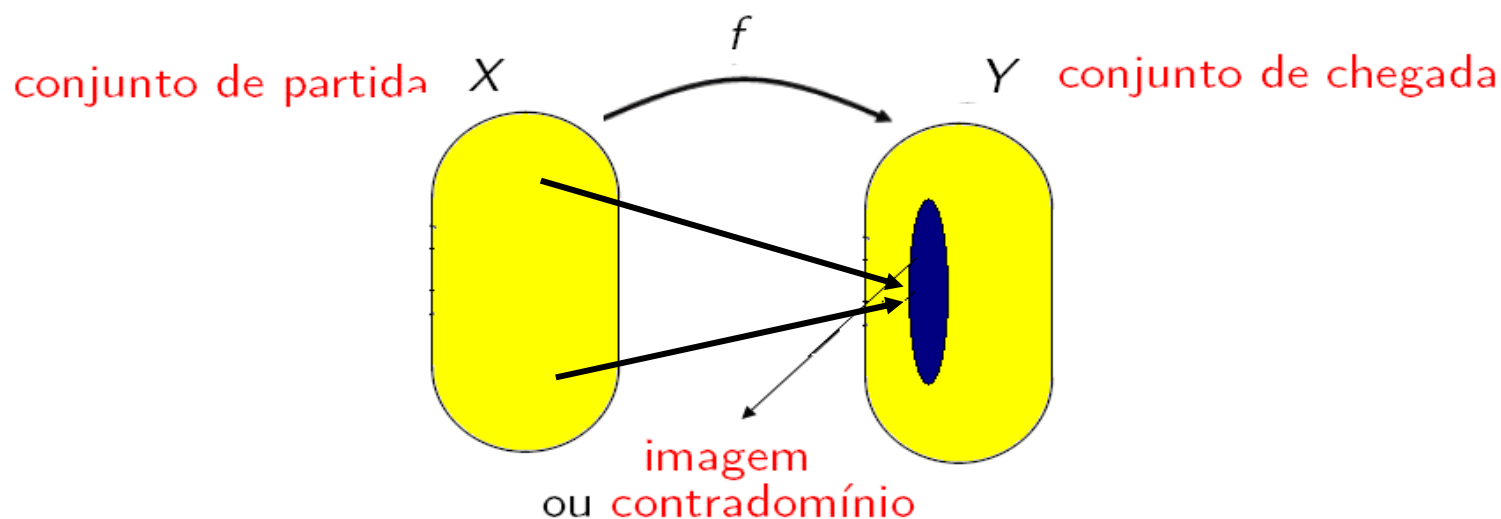
$$f : X \longrightarrow Y$$

é uma relação R de X em Y

$$R = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$$

verificando:

$$(\forall x \in X) (\exists^1 y \in Y) (x, y) \in R.$$



1.2 Funções

Sejam X e Y dois conjuntos.

Uma **aplicação** (ou **função**) de X em Y

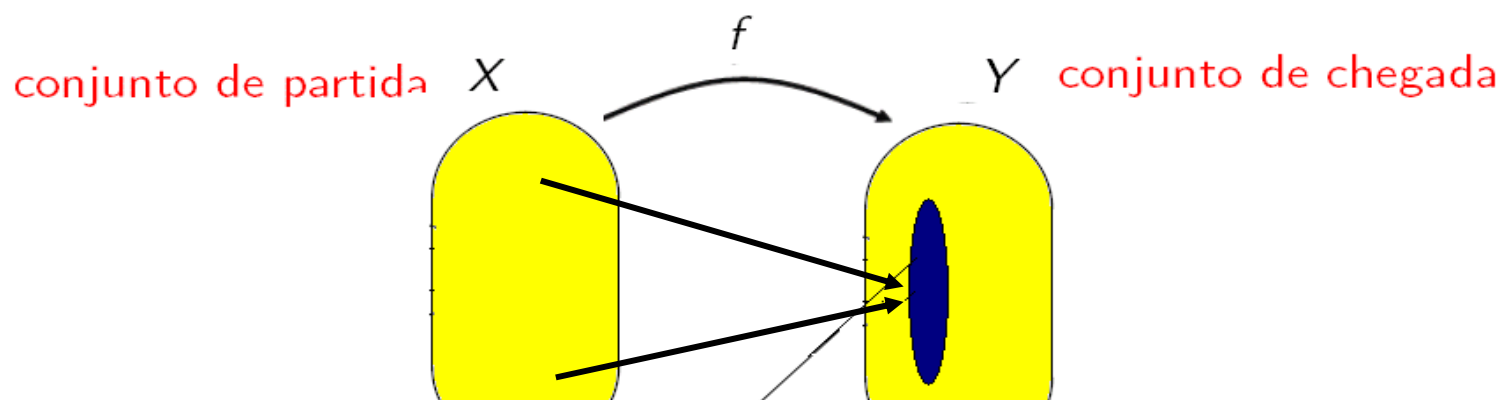
$$f : X \longrightarrow Y$$

é uma relação R de X em Y

$$R = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$$

verificando:

$$(\forall x \in X) (\exists^1 y \in Y) (x, y) \in R.$$

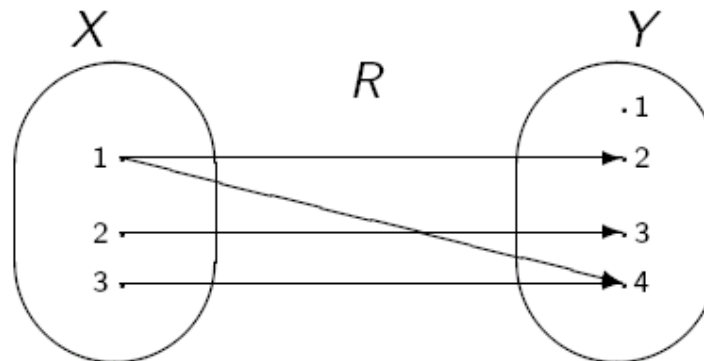


$$Im f = \{f(x) \mid x \in X\} = \{y \in Y \mid (\exists x \in X) y = f(x)\}.$$

Exemplos:

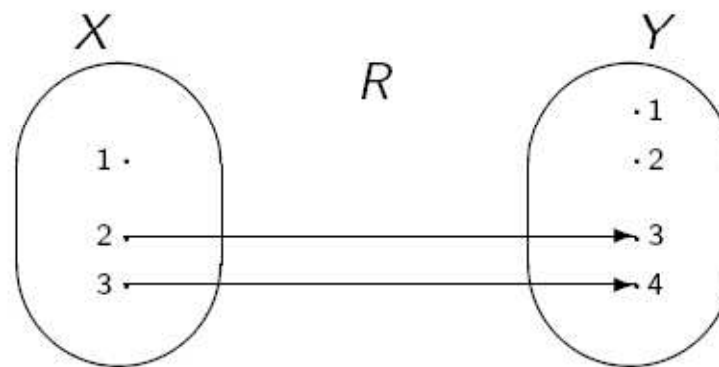
1. Sejam $X = \{1, 2, 3\}$ e $Y = \{1, 2, 3, 4\}$. Então:

- $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (1, 4)\}$ é uma relação de X em Y ,



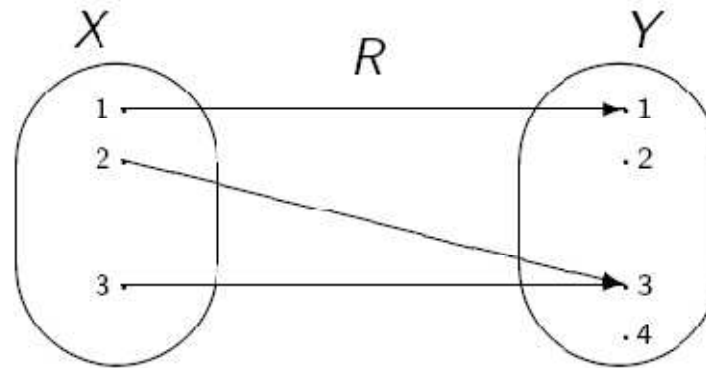
mas não é uma aplicação de X em Y .

- $R = \{(2, 3), (3, 4)\}$ é uma relação de X em Y ,



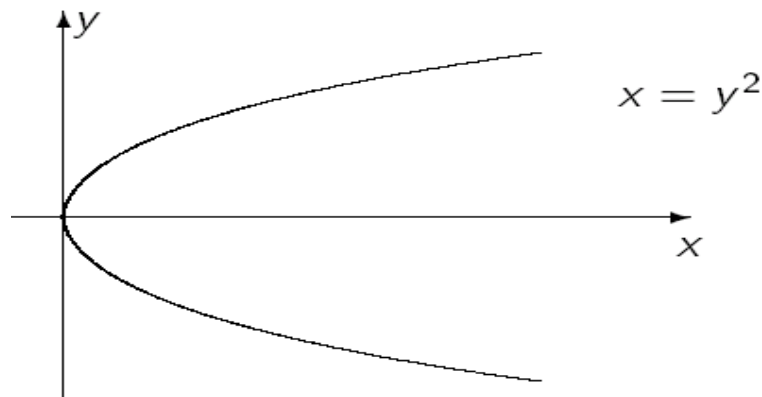
mas não é uma aplicação de X em Y .

- $R = \{(1,1), (2,3), (3,3)\}$ é uma aplicação de X em Y .

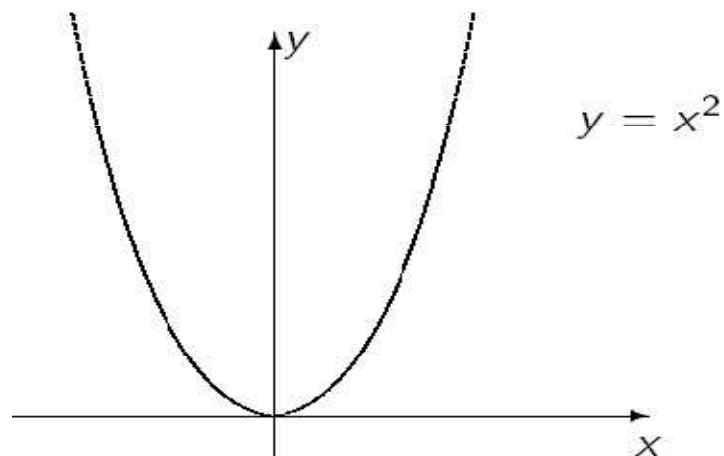


2. Sejam $X = Y = \mathbb{R}$. Então:

- $R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = y^2\}$ é uma relação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$,
mas não é uma aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.



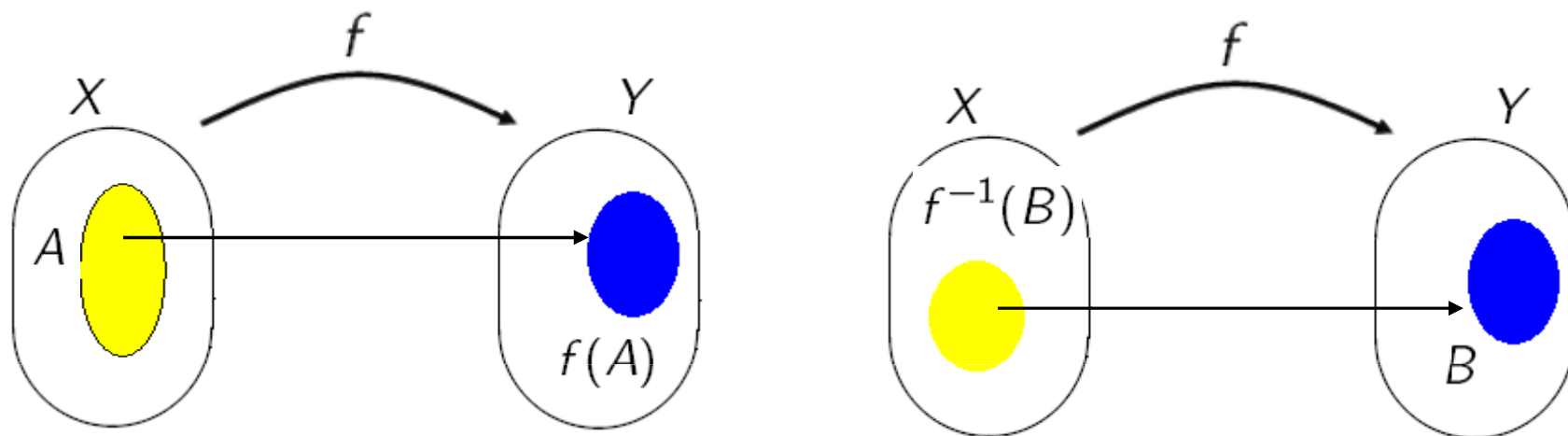
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 = y\}$ é uma aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.



Definição 1.2.1:

Sejam $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação, $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$.

- **imagem** de A (por meio de f) ao conjunto $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$;



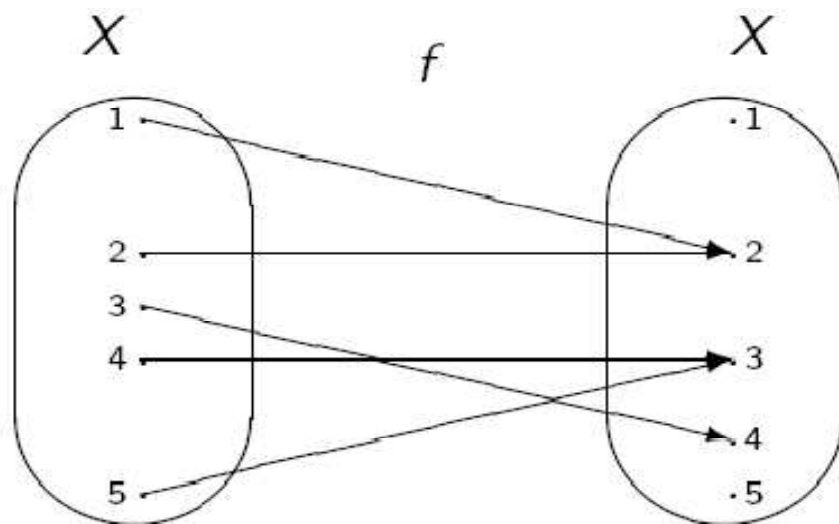
- **imagem recíproca** (ou **pré-imagem**) de B (por meio de f) ao conjunto

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Exemplos:

Sejam $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $f : X \longrightarrow X$ tal que

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$



É aplicação

- $\text{Im } f = \{2, 3, 4\}$
- $A = \{1, 2, 3\} \Rightarrow f(A) = \{2, 4\}$
- $B = \{1, 2, 3\}$
 $\Rightarrow f^{-1}(B) = \{1, 2, 4, 5\}$
- $f(f^{-1}(B)) = \{2, 3\} \subset B$

Definição 1.2.2:

Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação. Dizemos que:

① f é **injectiva** se

$$\forall a, b \in X, a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

(equivalentemente, se $\forall a, b \in X, f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$);

② f é **sobrejectiva** se $f(X) = Y$, isto é, se

$$\forall y \in Y \exists x \in X : y = f(x);$$

③ f é **bijectiva** se for simultaneamente injectiva e sobrejectiva

Exemplos:

1. A aplicação $f : X \rightarrow X$

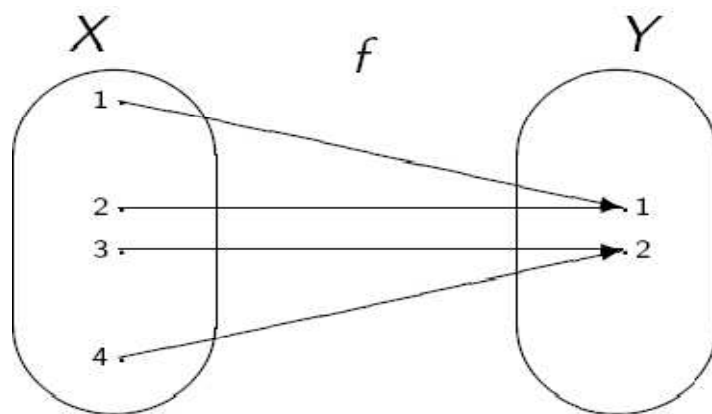
$$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

não é injectiva nem sobrejectiva.

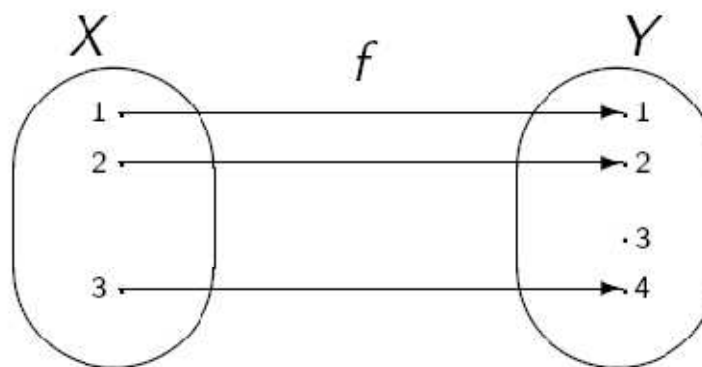
2. A aplicação $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(n) = n + 1$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ é injectiva e não é sobrejectiva.

3. Sejam $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{1, 2\}$



f é sobrejectiva e não é injectiva.

4. Sejam $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ e $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ uma aplicação de X em Y .

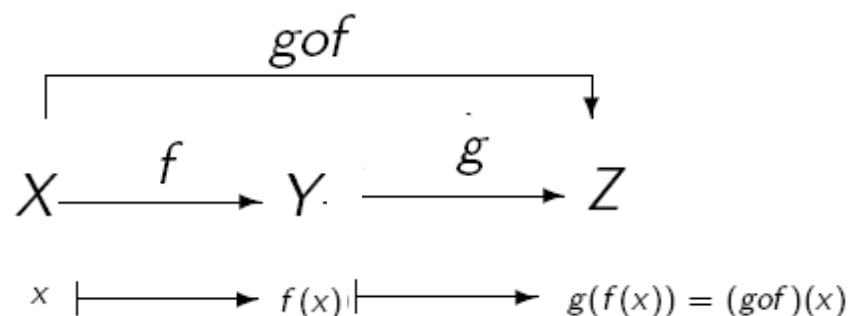


f é injectiva e não é sobrejectiva.

5. Seja X um conjunto qualquer e $f : X \longrightarrow X$ a aplicação definida por $f(x) = x$, para qualquer $x \in X$.

Então, f é injectiva e sobrejectiva, donde f é bijectiva.

aplicação identidade de X
 $f = 1_X$ ou id_X ou I_X



Teorema 1.2.3:

Sejam $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$ duas aplicações.
 Então a relação composição de g com f de X em Z

$$\text{gof} : X \longrightarrow Z$$

é uma aplicação que está definida por

$$(\text{gof})(x) = g(f(x)), \text{ para qualquer } x \in X.$$

Observações: Sejam $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$ duas aplicações.

- ① A composta fog está definida se, e só se, $Z = X$;
- ② Se $Z = X$ (as aplicações fog e gof estão definidas) não temos necessariamente $fog = gof$.

Exemplo: Sejam $X = \{1, 2, 3\}$

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

duas aplicações de X em X . Então,

$$fog = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = gof.$$

Teorema 1.2.4:

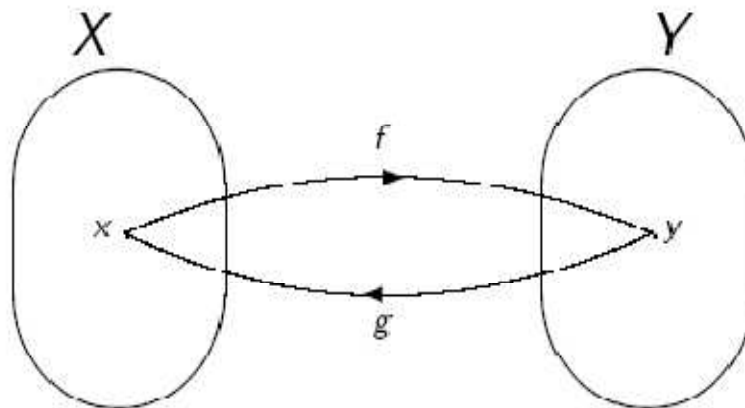
Sejam $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$ duas aplicações. Então:

- 1. Se f e g são injectivas, então $g \circ f$ é injectiva;*
- 2. Se f e g são sobrejectivas, então $g \circ f$ é sobrejectiva;*
- 3. Se f e g são bijectivas, então $g \circ f$ é bijectiva.*

Funções invertíveis:

Dizemos que uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ é **invertível** se existir uma aplicação $g : Y \longrightarrow X$ tal que

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \xrightarrow{g} X \\ & \searrow & \nearrow \\ & \text{gof} = \text{id}_X & \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{g} & X \xrightarrow{f} Y \\ & \searrow & \nearrow \\ & \text{fog} = \text{id}_Y & \end{array}$$



Teorema 1.2.5:

Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação invertível. Então, existe uma e uma só aplicação $g : Y \longrightarrow X$ tal que

$$g \circ f = id_X \quad \text{e} \quad f \circ g = id_Y.$$

f^{-1} aplicação inversa de f

Teorema 1.2.6:

Sejam $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$ duas aplicações invertíveis. Então, a aplicação $g \circ f : X \longrightarrow Z$ é invertível, tendo-se

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Teorema 1.2.7:

Uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ é invertível se, e só se, é bijectiva.

